

УДК 62-752.2:519.863

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ
НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ****¹Лапшин Е.С., ¹Блюсс Б.А., ¹Дзюба С.В.**¹*Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины***ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ДИНАМІЧНОГО ГАСИТЕЛЯ
НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ****¹Лапшин Є.С., ¹Блюсс Б.О., ¹Дзюба С.В.**¹*Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України***DETERMINATION OF OPTIMAL PARAMETERS FOR DYNAMIC LOW-FREQUENCY
OSCILLATION DAMPERS****¹Lapshin Ye.S., ¹Blyuss B.A., ¹Dziuba S.V.**¹*Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Sciences of Ukraine*

Аннотация. Динамические гасители колебаний широко используются для снижения нагрузок в различных механизмах и инженерных сооружениях. Для крупногабаритных сооружений: опоры ветроэлектрических установок, высотные здания, антенны и т.д. – характерны низкочастотные собственные колебания (менее 10 Гц, а нередко и меньше 1 Гц). В этом случае применяют гасители колебаний с телами качения, которые имеют простую конструкцию и высокую надежность.

Рассмотрена задача о собственных нелинейных колебаниях абсолютно жесткого полушара на горизонтальной плоскости в предположении отсутствия диссипации энергии, проскальзывания и опрокидывания на основание полушара. Показано важное практическое значение задачи для расчета динамических гасителей низкочастотных колебаний (менее 10 Гц, а нередко и меньше 1 Гц). Исследован один из простейших гасителей, который выполнен в виде полушара. Его колебания описываются нелинейным дифференциальным уравнением. Для настройки гасителя на частоту близкую к частоте основного тона колебаний сооружения важно знать собственную частоту гасителя колебаний. Ее, как правило, определяют в предположении о малости амплитуды колебаний, что позволяет линеаризовать уравнение движения. Численные методы, которые применяются для решения нелинейных дифференциальных уравнений движения при больших амплитудах, позволяют найти только частные решения для конкретных условий. Возникает необходимость в обобщении частных решений. Показано, что отношение собственной частоты линеаризованной системы к собственной частоте нелинейной системы не зависит от массы и радиуса полушара. Этот вывод сделал возможным обобщить результаты частных численных решений и получить формулу для определения рационального радиуса гасителя колебаний, которая учитывает влияние амплитуды на собственную частоту нелинейных колебаний.

Получена формула для определения рационального радиуса гасителя колебаний, выполненного в виде полушара, которая учитывает влияние амплитуды на собственную частоту нелинейных колебаний.

Ключевые слова: полушар, радиус, нелинейные колебания, собственная частота.

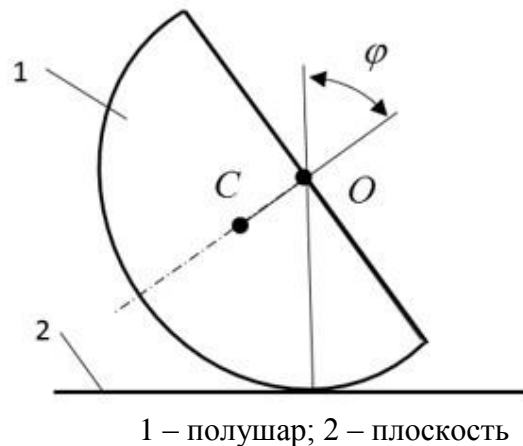
Введение. Динамические гасители колебаний широко используются для снижения нагрузок в различных механизмах и инженерных сооружениях [1]. Для крупногабаритных сооружений: опоры ветроэлектрических установок, высотные здания, антенны и т.д. – характерны низкочастотные собственные колебания (менее 10 Гц, а нередко и меньше 1 Гц [2, 3]). В этом случае применяют гасители колебаний с телами качения [2–6], которые имеют простую конструкцию и высокую надежность. Их обзор приведен в работах [2, 6].

Параметры гасителя должны быть такими, чтобы его собственная частота была близка к частоте основного тона колебаний сооружения [2]. Для этого важно знать собственную частоту гасителя колебаний.

Собственную частоту, как правило, определяют в предположении о малости амплитуды колебаний, что позволяет линеаризовать уравнение движения. При больших амплитудах нелинейное дифференциальное уравнение движения решают численными методами, которые, однако, позволяют найти только частные решения для конкретных условий. Возникает необходимость в обобщении частных решений.

Цель работы – определить рациональные параметры динамического гасителя колебаний с телом качения, обеспечивающие требуемую собственную частоту нелинейных колебаний и обобщение численных результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим один из простейших гасителей [6], выполненный в виде полушара 1, совершающего колебания на плоскости 2 (рис. 1). При решении ряда прикладных задач, связанных с вибрационным воздействием на сыпучую среду [4, 5], колебания полушара могут служить в качестве модельного представления движения твердых частиц.



1 – полушар; 2 – плоскость
Рисунок 1 – Расчетная схема гасителя колебаний:

При качании полушара предположим, что отсутствуют диссипация энергии, проскальзывание и опрокидывание на основание.

Уравнение колебаний полушара [6, 9, 10]

$$I_p \ddot{\varphi} + ml^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + mgl \sin \varphi = 0 . \quad (1)$$

где I_p – момент инерции полушара относительно мгновенного центра скоростей; φ – угол; m – масса полушара; l – расстояние центра масс C от основания O полушара; g – ускорение свободного падения.

Точка над буквами означает дифференцирование по времени. Начальные условия: $\varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = 0$. Поскольку диссипация не учитывается, то φ_0 – амплитуда собственных колебаний.

Момент инерции I_p и расстояние l вычисляются по формулам:

$$I_p = ml^2 \left(\frac{83}{45} + \sin^2 \varphi \right), \quad l = \frac{3}{8} r$$

где r – радиус основания полушара.

Собственная частота линеаризованной системы. Нелинейное уравнение (1) не имеет аналитического решения. Для его линеаризации предполагают, что угол φ мал и принимают

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1.$$

В результате получают

$$I_c \ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0. \quad (2)$$

где $I_c = \frac{83}{320}mr^2$ – момент инерции полушара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к плоскости чертежа.

Разделив (2) на I_c получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{120g}{83r}}$ – собственная круговая частота.

Тогда частота собственных колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{120g}{83r}}. \quad (3)$$

Из (3) определим радиус, при котором полушар имеет собственную частоту ν_0

$$r = \frac{30g}{83} (\pi \nu_0)^{-2}. \quad (4)$$

Собственная частота нелинейной системы. Для определения собственной частоты нелинейных колебаний можно для каждого конкретного значения r и φ_0 численно решать уравнение (1), однако, это делает трудоемким обобщение результатов. Задача упрощается, если учесть, что на основании теоремы об изменении кинетической энергии, получена угловая скорость [10]

$$\dot{\varphi} = 4 \cdot \sqrt{\frac{g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{3r(83/45 + \sin^2 \varphi)}}.$$

Полушар поворачивается на угол $d\varphi$ за время

$$dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}. \quad (5)$$

Интегрируя обе части уравнения (5), определим период T колебаний и собственную частоту ν с учетом нелинейности

$$T = \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{3r(83/45 + \sin^2 \varphi)}{g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} d\varphi, \quad \nu = \frac{1}{T}. \quad (6)$$

При интегрировании учтена симметрия фазового портрета относительно осей координат, что позволило задать пределы 0 и φ_0 , а для получения периода результат увеличить в четыре раза. На рис. 2 приведен характерный вид фазового портрета, который получен численным интегрированием уравнения (1) методом Рунге-Кутты-Фальберга порядка 4–5 при $r = 0,1$ м, $\varphi_0 = 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90° . Здесь и далее вычисления выполнены в математическом пакете Maple.

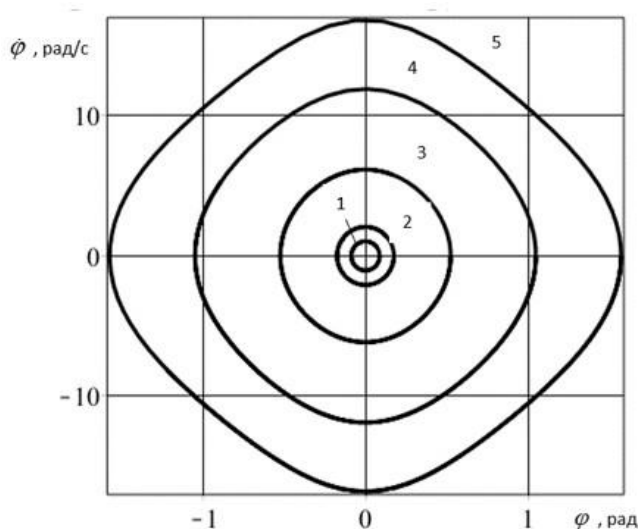


Рисунок 2 – Характерный вид фазового портрета колебаний полушара:
($r = 0,1$ м, где 1, 2, 3, 4 и 5 – $\varphi_0 = 5^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90°)

Обобщение частных численных решений. Найдем отношение собственных частот

$$\nu^* = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{10}{83}} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\frac{83/45 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi. \quad (7)$$

Эту величину назовем относительной собственной частотой. Акцентируем внимание на том, что ν^* не зависит от массы и радиуса полушара.

Относительная погрешность, обусловленная линеаризацией уравнения (1)

$$\delta = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \cdot 100\% = (1 - \nu^*) 100\%.$$

На рис. 3 круглыми маркерами представлены результаты численного интегрирования методом Ньютона-Котеса выражения (7), а треугольными – погрешности.

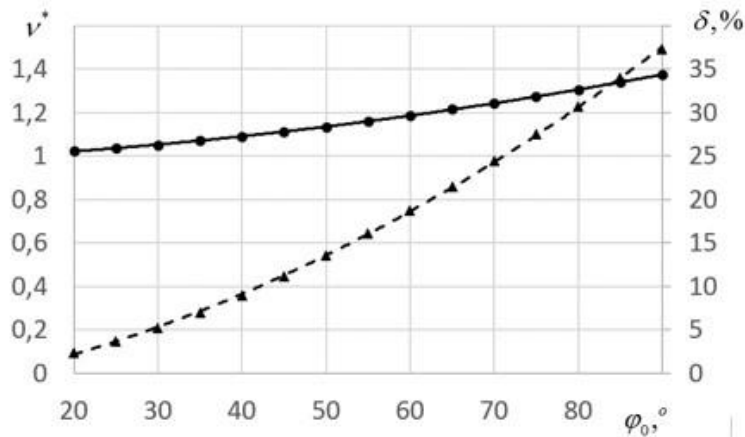


Рисунок 3 – Зависимость относительной собственной частоты ν^* (сплошная линия) и погрешности δ (пунктир) от начального угла φ_0

При амплитудах больше 60 градусов погрешность превышает 20 %. Линиями изображены результаты аппроксимации функциями ($20^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$):

$$\nu^* = 3 \cdot 10^{-5} \varphi_0^2 + 1,6 \cdot 10^{-3} \varphi_0 + 0,9763; \quad (8)$$

$$\delta = 3,1 \cdot 10^{-3} \varphi_0^2 + 0,1621 \varphi_0 - 2,3747. \quad (9)$$

Аппроксимация выполнена в интервале $20^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ методом наименьших квадратов и обеспечивает высокую точность (коэффициент детерминации 0,999).

Формулы (8) и (9) позволяют определить собственную частоту колебаний полушара и погрешность при линеаризации уравнения колебаний. Поскольку, как показано выше ν^* не зависит от массы и радиуса полушара, учитывая (7) и (8), получим выражение для определения собственной частоты нелинейных колебаний

$$\nu = \nu_0 \left(3 \cdot 10^{-5} \varphi_0^2 + 1,6 \cdot 10^{-3} \varphi_0 + 0,9763 \right)^{-1}. \quad (10)$$

Формула (10) обобщает результаты численных экспериментов, направленных на исследование влияния начального угла φ_0 на собственную частоту колебаний полушара. Она позволяет по аналитически определяемой собственной частоте ν_0 для малых начальных улов ($\varphi_0 < 20^\circ$) определить частоту ν для начальных углов до 90° .

Подставляя (3), (8) в (7) и решая относительно r , получим радиус, при котором полушар имеет собственную частоту ν

$$r = \frac{30g}{83} (\pi \nu \nu^*)^{-2}. \quad (11)$$

В формуле (11) в отличие от (4) присутствует сомножитель ν^* , учитывающий влияние амплитуды φ_0 на собственную частоту ν при нелинейных колебаниях.

Выводы. Получены формулы (3), (6), определяющие влияние радиуса r полушара на собственные частоты ν_0 и ν как при малых, так и больших амплитудах φ_0 колебания. В первом случае колебания линейные, а во втором – нелинейные, зависящие от амплитуды.

Показано, что отношение частот $\nu^* = \nu_0/\nu$ не зависит от радиуса полушара. Это позволило обобщить результаты численных экспериментов и установить – влияние амплитуды на относительную частоту описывается полиномом второй степени (8).

Получена формула (11) для определения рационального радиуса гасителя колебаний, выполненного в виде полушара, которая учитывает влияние амплитуды на собственную частоту нелинейных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челомей, В.Н. – Вибрации в технике. Том 6. Защита от вибрации и ударов, 1981 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html> – Загл. с экрана.
2. Legeza, V. P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations / V. P. Legeza. // *Strength of Materials*. – 2004. – №2 (36). – P. 186–194.
3. Takei, H. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper / H. Takei, Y. Shimazaki // *Journal of Applied Mechanics*. – 2010. – №13. – P. 587–594.
4. Legeza, V. P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder / V. P. Legeza. // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, №4. – P. 380–384.
5. Obata, M. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper / M. Obata, Y. Shimazaki. // *Journal of Vibration and Control*. – 2008. – №14. – P. 867–884.
6. Bransch, M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations / M. Bransch // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – №368. – P. 22–35.
7. Надутый, В.П. Вероятностные процессы вибрационной классификации минерального сырья / В.П. Надутый, Е.С. Лапшин. – К.: «Наукова думка», 2005 – 180 с.
8. Лапшин, Е. С. Вероятностная оценка скорости вибротранспортирования слоя сыпучего материала / Е. С. Лапшин // *Вибрации в технике и технологиях: Всеукр. науч.-техн. журн.* – Винница, 2004. – № 3(35). – С. 64–67.
9. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, 2014 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1920676 – Загл. с экрана.
10. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. – Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 3. Специальные главы механики, 1973 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.zodchii.ws/books/info-1135.html> – Загл. с экрана.

REFERENCES

1. Chelomey, V.N. (1981), "Vibrations in engineering. Volume 6. Defence against vibrations and strikes", available at: <http://www.zodchii.ws/books/info-1224.html> (Accessed 10 Jan 2018).
2. Legeza, V. P. (2004), "Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations", *Strength of Materials*, no. 2 (36), pp. 186–194.
3. Takei, H. and Shimazaki, Y. (2010), "Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper", *Journal of Applied Mechanics*, no. 13, pp. 587–594.
4. Legeza, V. P. (2012), "Cycloidal pendulum with a rolling cylinder", *Mechanics of Solids*, Vol. 47, no. 4, pp. 380–384.
5. Obata, M. and Shimazaki, Y. (2008), "Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper", *Journal of Vibration and Control*, no. 14, pp. 867–884.
6. Bransch, M. (2016), "Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, no. 368, pp. 22–35.

7. Nadutyi, V.P. and Lapshin, Ye.S. (2005), *Veroyatnostnyye protsessy vibratsionnoy klassifikatsii mineral'nogo syr'ya* [Probabilistic processes in vibrational classification of natural resources], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.
8. Lapshin, Ye.S. (2004), "Probabilistic estimate of the velocity of vibrational transport of a layer of loose material", *Vibrations in engineering and technologies*, no. 3(35), pp. 64–67.
9. The official site of Russian Foundation of basic Research (2014), "Dynamics of a body in contact with a solid surface", available at: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1920676 (Accessed 05 Jan 2018).
10. Bat, M.I., Dzhanelidze, G.Yu. and Kelzon, A.S. (1973), "Theoretical mechanics in examples and problems. Volume 3, Advanced Chapters of Mechanics", available at: <http://www.zodchii.ws/books/info-1135.html> (Accessed 11 Jan 2018).

Об авторах

Лашин Евгений Семенович, доктор технических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник в отделе геодинамических систем и вибрационных технологий, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, les48@i.ua

Блюсс Борис Александрович, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом геодинамических систем и вибрационных технологий, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, bblyuss@googlegmail.com

Дзюба Сергей Владимирович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела геодинамических систем и вибрационных технологий, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепр, Украина, sergejdzuba@gmail.com

About the authors

Lapshin Yevgeny Semenovich, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.), Senior Research, Principal Re-searcher in the Department of Geodynamic Systems and Vibration Technologies, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM NASU), Dnepr, Ukraine, les48@i.ua

Blyuss Boris Aleksandrovich, Doctor of Technical Sciences (D.Sc.), Professor, Head of Department of Geodynamic Systems and Vibration Technologies, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM NASU), Dnepr, Ukraine, bblyuss@googlegmail.com

Dziuba Serhii Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Senior Researcher in Department of Geodynamic System and Vibration Tehnologies, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM, NAS of Ukraine), Dnipro, Ukraine, sergejdzuba@gmail.com

Анотація. Динамічні гасителі коливань широко використовуються для зниження навантажень в різних механізмах і інженерних спорудах. Для великогабаритних споруд: опори ветроелектричних установок, висотні будівлі, антени і т.д. – характерні низькочастотні власні коливання (менше 10 Гц, а нерідко і менше 1 Гц). У цьому випадку застосовують гасителі коливань з тілами хитання, які мають просту конструкцію і високу надійність.

Розглянуто задачу про власні нелінійних коливаннях абсолютно жорсткої напівкулі на горизонтальній площині в припущенні відсутності дисипації енергії, прослизання і перекидання на підставу напівкулі. Показано важливе практичне значення задачі для розрахунку динамічних гасителів низькочастотних коливань (менше 10 Гц, а нерідко і менше 1 Гц). Досліджено один з найпростіших гасителів, який виконаний у вигляді напівкулі. Його коливання описуються нелінійним диференціальним рівнянням. Для настройки гасителя на частоту близьку до частоти основного тону коливань споруди важливо знати власну частоту гасителя коливань. Її, як правило, визначають в припущенні про малість амплітуди коливань, що дозволяє лінеаризувати рівняння руху. Чисельні методи, які застосовуються для вирішення нелінійних диференціальних рівнянь руху при великих амплітудах, дозволяють знайти лише приватні рішення для конкретних умов. Виникає необхідність в узагальненні приватних рішень. Показано, що відношення власної частоти лінеаризованої системи до власної частоти нелінійної системи не залежить від маси і радіуса напівкулі. Цей висновок зробив можливим узагальнити результати приватних чисельних рішень і отримати формулу для визначення раціонального радіуса гасителя коливань, яка враховує вплив амплітуди на власну частоту нелінійних коливань.

Одержано формулу для визначення раціонального радіуса гасителя коливань, виконаного у вигляді напівкулі, яка враховує вплив амплітуди на власну частоту нелінійних коливань.

Ключові слова: полушар, радіус, нелінійні коливання, власна частота.

Annotation. The dynamic extinguishers of vibrations are widely used for the decline of loadings in different mechanisms and engineering buildings. For great-overall dimensional buildings: supports of wild-power options, height buildings, aerals and etc – low-frequency own vibrations are characteristic (less than 10 Hertz, and quite often and less than 1 Hertz). The extinguishers of vibrations with the bodies of rolling, which have simple construction and high reliability, apply in this case.

In the paper, a problem of finding intrinsic frequencies of nonlinear oscillations for completely solid hemisphere on a horizontal plane is considered with the assumption that there is no energy dissipation and slipping or overturning on the

base of the hemisphere. Practical importance of this problem is highlighted for the purposes of computing parameters for dynamic dampers of low-frequency oscillations (with frequencies lower than 10 Hz, sometimes even lower than 1 Hz). The authors consider one of the simplest types of hemispherical dampers, whose oscillations are described by nonlinear differential equation. In order to tune the damper to frequency close to the main intrinsic frequency of oscillations of the facility, it is important to know intrinsic frequency of the oscillation damper. This frequency is usually determined under assumption of low-amplitude oscillations, which allows to linearize the equation of motion. Numerical methods, which are used for solving nonlinear differential equations for high amplitudes, can provide particular solutions for concrete conditions only. Therefore, this necessitates generalization of the particular solutions. It is stated that ratio of intrinsic frequency of linearized system to the intrinsic frequency of nonlinear system does not depend on mass or radius of hemisphere. This conclusion made it possible to generalize results of particular numerical solutions and derive an equation for finding optimal radius of oscillation damper with taking into account effect of amplitude on intrinsic frequency of oscillations.

A formula for determination of rational radius of the extinguisher of vibrations, executed as a semiball, is got, which takes into account influence of amplitude on own frequency of nonlinear vibrations.

Keywords: hemisphere, radius, nonlinear oscillations, intrinsic frequency.

Стаття надійшла до редакції 18.02. 2018.

Рекомендовано до друку д-ром техн. наук Надутим В.П.