

11. Пятецкий В.М., Кунцевич А.О. Упрощенные формулы для расчета массивных и стенчатых фундаментов под машины с динамическими нагрузками // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1988. – № 3. – С. 14-16.

12. Кушнер С.Г. Расчет осадок оснований зданий и сооружений. – К.: Будівельник, 1990. – 142 с.

13. Киричек Ю.А. Комбинированные массивно-плитные фундаменты. Ресурсосберегающие методы расчета и проектирования. – Днепропетровск: Изд-во Приднепровской госуд. академии строит. и арх., 2001. – 207 с.

**УДК 622.023.23:539**

Канд. техн. наук Г.І. Ларіонов,  
м.н.с. А.В. Пазинич, м.н.с. С.М. Пилипчук,  
інж. К.В. Цепков (ИГТМ НАН Украины)

## **ДО РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТІВ ПРИ ГІДРОВІДЖИМІ**

В работе дана сравнительная характеристика двух классов численных методов – метода конечных элементов (МКЭ) и метода граничных элементов (МГЭ). Отмечены преимущества МГЭ по сравнению с МКЭ для решения пространственной задачи теории упругости. Численное решение плоской задачи о растяжении бесконечной пластины с отверстием в центре методом МГЭ сравнивалось с точным решением (задача Кирша). Полученные графики относительной погрешности решения позволили сделать вывод о хорошей точности и применении его для расчёта напряжённо-деформированного состояния вокруг скважин при гидроразрыве.

## **ON STRESS-STRAIN CALCULATION METHODS TO HYDRORUPTURING BOREHOLE**

Paper is devoted to the working method choice from two class finite element (MFE) and boundary element (MBE) methods. Pointed out the MBE advantages to space elastostatic task solve. The results of flat MBE solve of nonfinite tensile plate with central hole were compared with analytic exact solve (Kirsch's task). Relative error evaluating plots and detail analyses permit to made conclusion about effectiveness of MBE methods and that make convenient using of MBE to stress-strain state calculation within hydrorupture borehole.

Збільшення темпів видобування корисних копалин тісно пов'язано зі збільшенням інтенсивності ведення гірничих робіт що приводить до суттєвих змін природного напруженого стану гірських порід. Так при видобуванні вугілля швидка зміна напружено-деформованого стану у викидонебезпечних пластах часто приводить до динамічного прояву гірського тиску як то гірський удар або викид.

Одним з факторів орієнтуючись на який, виявляють стан маси вугілля близький до критичного є кількість метану, що виділяється [1]. Більш того, навіть якщо гірничі роботи ведуться не у викидонебезпечних пластах то велика кількість метану, що виділяється у виробку може значно знизити темпи ведення робіт по газовому фактору. Для усунення цих перешкод і для збільшення інтенсифікації видобування необхідно забезпечити ефективну дегазацію розроблюваних пластів.

Найбільшого поширення набули методи дегазації у зоні ведення гірничих

робіт з допомогою дегазаційних свердловин. Кількість і інтенсивність виходу метану з вугільного пласта залежить від часу існування цих свердловин, напружено-деформованого стану у цій зоні тощо.

Тому для прискорення процесів дегазації використовують методи інтенсифікації цих процесів.

Одним з найпоширеніших методів інтенсифікації процесів дегазації, а відповідно і методів зниження ймовірності викидів є гідровіджим вугільного пласта.

Процеси прискорення дегазації пов'язують зі зміною напружено-деформованого стану, тому знання його у околі свердловини дозволить зробити висновки щодо процесу тріщиноутворення і надійного аналізу об'ємів виходу метану з пласта. Оскільки природний напружений стан у околі свердловини є суттєво складним, то для оцінки характеру напружено-деформованого стану пласта необхідно розв'язувати просторову задачу теорії пружності.

На жаль, у замкнутому вигляді розв'язок цієї задачі відомий лише для обмеженої кількості задач і граничних умов. Для більшості задач прикладного характеру ми вимушені користуватися чисельними процедурами пошуку розв'язків.

Чисельні методи розв'язку граничних задач можна розділити на два чітких класи: клас який потребує використання апроксимації у всій області  $\Omega$  і клас, який потребує використання апроксимації тільки на границі  $S$ . До першого класу належать методи кінцевих різниць та кінцевих елементів (МКЕ), до другого методи граничних елементів (МГЕ).

Основна ціль для методів першого класу є відшукування розв'язку задачі у вузлах сітки, розв'язок між вузлами виражається простою наближеною формулою через значення у вузлах. Пов'язуючи ці наближені вирази з початковими диференціальними рівняннями, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких невідомі параметри – вузлові значення в області  $\Omega$  – є вирази через відомі величини у вузлах сітки, і знаходяться на границі області.

У методі граничних елементів (МГЕ) на елементи розбивається границя  $S$  області. Чисельний розв'язок складається на основі отриманих попередньо аналітичних розв'язків для простих сингулярних задач таким чином, щоб задовольнити наближено заданим граничним умовам на кожному елементі контуру  $S$ .

Оскільки кожний сингулярний розв'язок задовольняє у  $\Omega$  визначеним диференціальними рівняннями, немає потреби розбивати власне саму область  $\Omega$  на сітку елементів.

Система рівнянь, що підлягає розв'язку стає значно меншою, ніж у методі кінцевих елементів (МКЕ) для цієї ж задачі.

Як тільки ці рівняння розв'язані, є можливість побудувати розв'язок у будь якій точці області  $\Omega$ . Таким чином, можна довільним чином вибрати точки, в яких потрібно отримати розв'язок, замість автоматичної прив'язки результатів до ряду фіксованих точок (внутрішніх вузлах сітки) як це робиться у МКЕ. Оскільки у методах МГЕ використовується аналітичні рішення які є справедливими усюди у області  $\Omega$ , то вони потенційно більш точні, ніж методи МКЕ, у яких

апроксимації використовується у кожній підобласті  $\Omega$ . Фізичні величини, що пов'язані з похідними рішень можна отримати математично, диференціюючи сингулярні розв'язки та знаходячи їхню суму.

Ця обставина вказує також на ефективність використання МГЕ, тому що це призводить до підвищення точності розв'язку поставленої задачі. Таким чином можна дійти до висновку, що у цьому порівнянні перевагу мають методи граничних елементів.

Особливої ефективності методи граничних елементів набувають при розв'язанні просторових задач теорії пружності. Їх особлива ефективність у порівнянні з МКЕ полягає у тому, що вона зводить розв'язання просторової задачі до розв'язання плоскої задачі.

Фактично для розв'язання просторової задачі необхідно вибрати сингулярний просторовий розв'язок і задовольнити його на площині  $\Omega$  вибором відповідних значень невідомої функції у вузлах сітки граничних елементів.

Тобто замість знаходження  $3N$  невідомих функцій при використанні МКЕ, використовуючи МГЕ знаходять лише  $2N$  невідомих функцій, де  $N$ -кількість вузлів на контурі  $S$ .

Для визначення ефективності і точності розв'язків МГЕ методу граничних елементів. Висувалась та чисельно розв'язувалась задача: дослідити напружений стан у тонкій рівномірно розтягнутій прямокутній пластині за наявності невеликого кругового отвору (рис. 1) [2].

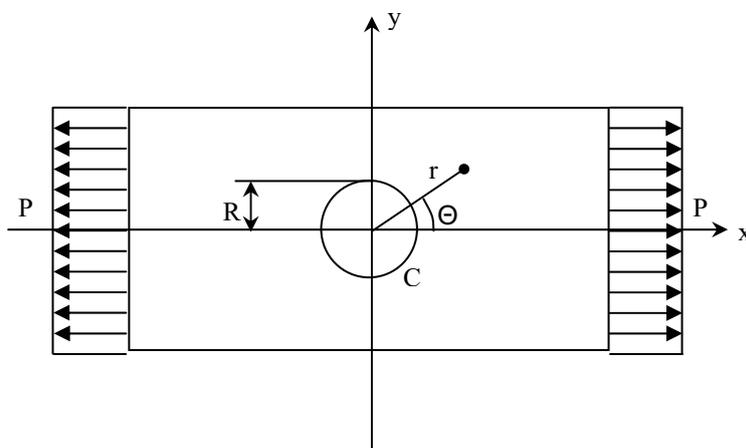


Рис. 1 – Постановка задачі

Додаткові напруження, що спричинені малим отвором мають місцевий характер, швидко затухають при віддалені від контуру.

Аналітичний розв'язок цієї задачі, відомий як задача Кірша [3], знаходився з використанням функції напружень  $\varphi$ . З урахуванням цих обставин задача ставилась таким чином

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi &= 0 & \text{в } \Omega \\ \sigma_x &= p \text{ на } \infty \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = \tau_{xy} &= 0 \text{ на } \infty \\ F_x = F_y &= 0 \quad x, y \notin C\end{aligned}$$

де  $\varphi$ –функція напружень, що вибиралась з умов

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ F_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}; F_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\end{aligned}$$

де  $F_x, F_y$  – зосереджені результуючі зусилля, прикладені до контуру  $C$ .

Використовуючи комплексну форму запису функції напружень  $\varphi$ , згідно з [3, 4] отримані вирази для характеристик напружено деформованого стану

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p}{2} \left( 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \left( 1 - 4 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right) \cdot \cos(2\theta) \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left( 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \left( 1 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right) \cdot \cos(2\theta) \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left( 1 + 2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right) \cdot \sin(2\theta) \\ u_r &= \frac{PR}{8G} \left( (\chi - 1) \left( \frac{r}{R} \right) + 2 \left( \frac{R}{r} \right) + 2 \left( \left( \frac{r}{R} \right) + (\chi + 1) \left( \frac{R}{r} \right) - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right) \cdot \cos(2\theta) \right) \\ u_\theta &= -\frac{PR}{4G} \left( \left( \frac{r}{R} \right) + (\chi - 1) \left( \frac{R}{r} \right) + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right) \cdot \sin(2\theta)\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$

Результати чисельного розв'язку цієї задачі методом граничних елементів (метод фіктивних навантажень) приведені на рис. 2, 3, 4.

Графіки демонструють відповідність отриманих розв'язків фізичним уявленням про розподіл напружень у зоні отвору і не суперечить відомим розв'язкам [2 - 4].

Результати порівнянь точності чисельного розв'язку отриманого з використанням методу граничних елементів у порівнянні з аналітичним розв'язком для різної кількості граничних елементів на контурі отвору приведені на рис. 6

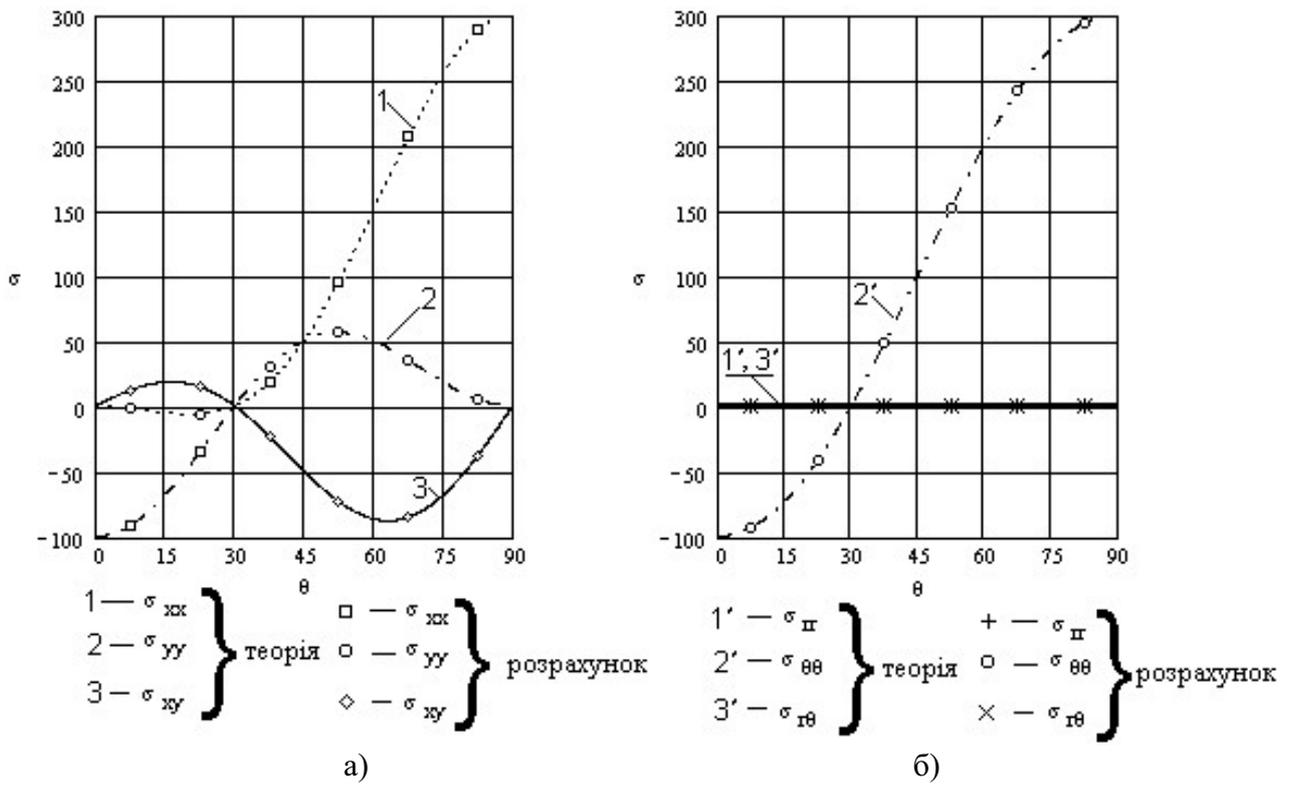


Рис. 2 – Розподіл напружень вздовж контуру С: а)  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ , б)  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ .

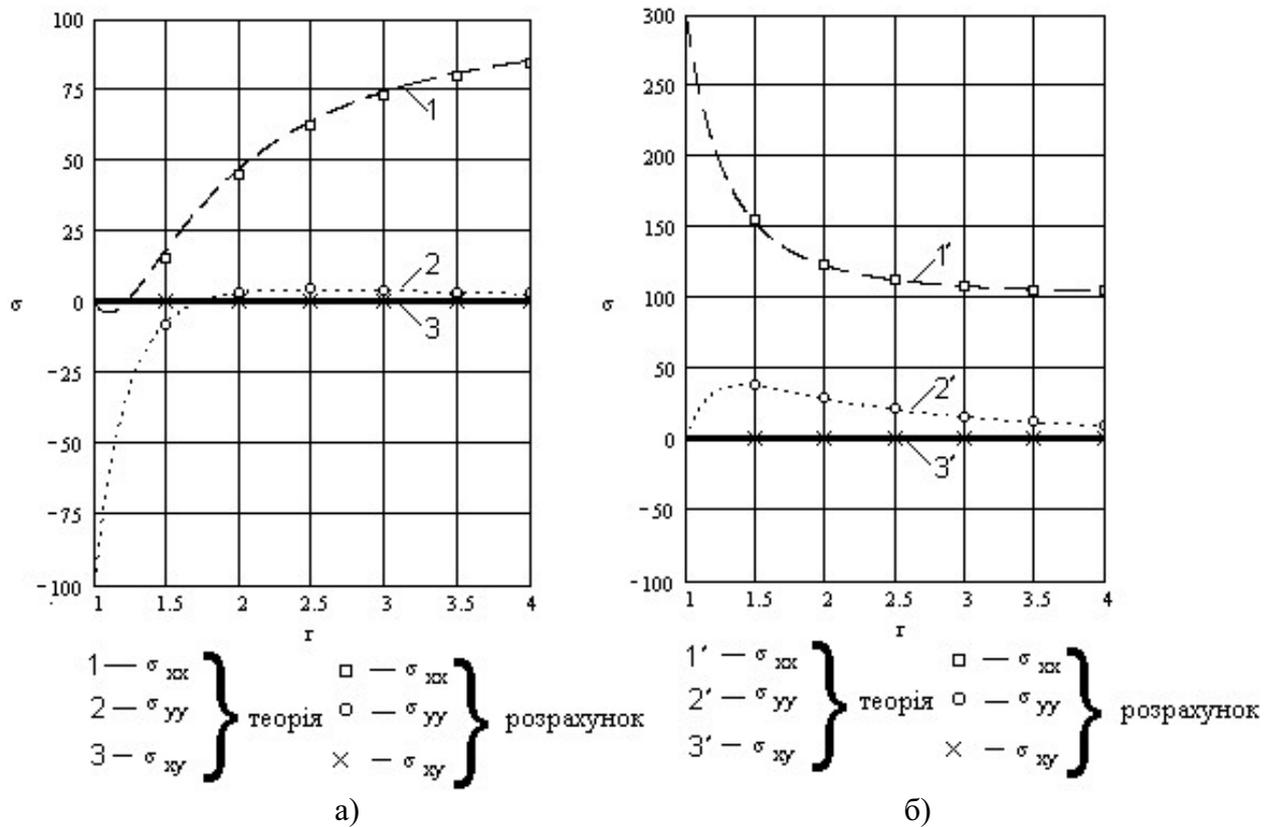


Рис. 3 – Розподіл напружень  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  вздовж осі а)  $Ox$ , б)  $Oy$ .

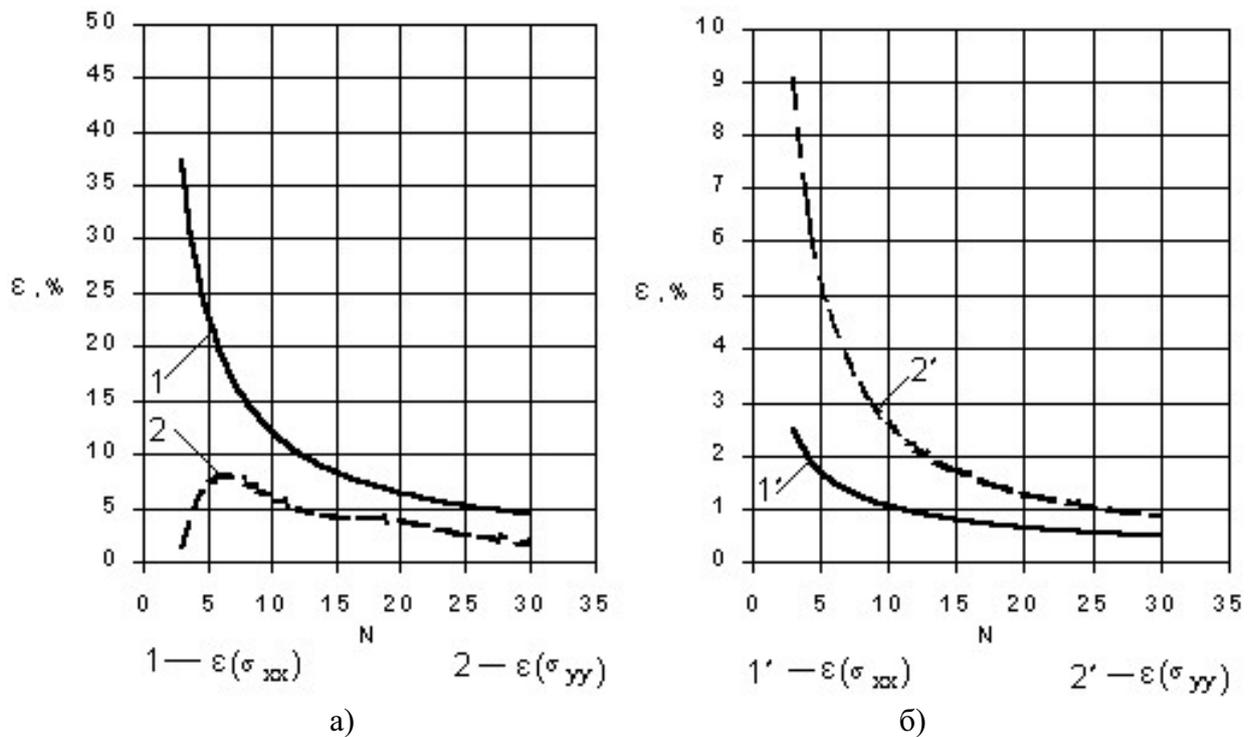


Рис. 4 – Розподіл відносної похибки для напружень  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  від кількості вузлів  $N$  на контурі  $C$  вздовж осі а)  $Ox$ , б)  $Oy$ .

Детальний аналіз залежності відносної похибки отриманих результатів від числа граничних елементів на контурі отвору показує, що розподіл відносної похибки збігається з висновком теореми про максимум для гармонічних функцій, де  $x; y \notin C$ . Відмінність розподілу похибки від висновків цієї теореми обумовлена тим, що розв'язок відшукувався за умови повного задоволення граничних умов у вузлах граничних елементів [5]. Зрозуміло, що при невеликій кількості числа граничних елементів на які розбивається контур для точок що лежать між вузлами граничних елементів, відносна похибка буде повністю відповідати висновкам теореми.

Результати порівнянь з певністю підтверджують високу ефективність і точність розв'язку цієї задачі що дає певність у тому, що чисельні розв'язки інших задач також будуть отримані з високою точністю.

Спираючись на результат аналізу відносної похибки можна зробити висновок, що методом МГЕ мають достатню для інженерних розрахунків точність, при невеликих затратах часу на підготовку вхідних даних та на знаходження власне розв'язку.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисенко А.А. Теоретические основы гидроотжима и гидрорыхления на угольных шахтах.– М.: Наука, 1986.–114 с
2. С. Крауч, А. Старфилд Методы граничных элементов в механике твёрдого тела М.: Мир, 1987, 328 с.
3. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости М.: Высшая школа, Изд. 2-е, 1987, 215 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости М.: Наука, 1966, 707 с.
5. Ларионов Г.И. Исследование вычислительных особенностей применения потенциала простого слоя для расчёта валов на кручение.// Вопросы химии и химических технологий, № 1, 2002.–с 117-122.